DESIGUALTATS GEOMÈTRIQUES

Miquel Amengual Covas

Les desigualtats geomètriques són tan antigues com la mateixa geometria. Així, el primer llibre dels *Elements* d'Euclides conté diversos teoremes sobre desigualtats entre angles i costats d'un triangle. El més important és, potser, la Proposició XX: *en un triangle, la suma de dos costats és més gran que el tercer.* Sobre aquesta Proposició es basen totes les desigualtats entre elements d'un triangle.

En aquest capítol establirem alguna d'aquestes desigualtats, precisament perquè el triangle és la més elemental de les figures geomètriques més simples, els polígons. Les hem seleccionat d'entre les moltíssimes que es coneixen i que es troben escampades en llibres, revistes, col·leccions i seccions de problemes i exàmens, etc. Hem fet servir, quan ha calgut, resultats que figuren als capítols de Geometria i Desigualtats.

Notacions bàsiques

Designarem, com és habitual, els tres costats d'un triangle per a, b i c. Els angles oposats respectius es designaran per A, B i C. Es representarà per R el radi del cercle circumscrit al triangle, i per r el radi del cercle inscrit. Els radis dels cercles excrits (o exinscrits) es designaran per r_a, r_b i r_c. Les mesures de les tres altures seran h_a, h_b i h_c, i les de les tres mitjanes m_a, m_b i m_c. S serà l'àrea del triangle, i p el semiperímetre.

La desigualtat d'Euler

Començarem amb una desigualtat de les més antigues, atribuïda a Euler, que diu que en *tot triangle, el radi de la circumferència circumscrita és més gran o igual que el diàmetre de la circumferència inscrita.* És una desigualtat emblemàtica, ja que és simple i no trivial a la vegada.

Aquesta desigualtat

$$R \geq 2r, \tag{1}$$

és una conseqüència de la fórmula, també d'Euler,

$$OI^2 = R(R - 2r),$$

que relaciona el quadrat de la distància entre l'incentre I i el circumcentre O d'un triangle, amb els radis r i R. En donarem una demostració.

Tenim les igualtats elementals $(p-a)+(p-b)+(p-c)=p$, $S = rp = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c)$ que per simple substitució donen

(2) $$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

D'altra banda,

$$r_a + r_b + r_c - r = S\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} - \frac{1}{p}\right) =$$
$$= S\left(\frac{c}{(p-a)(p-b)} + \frac{c}{p(p-c)}\right) = \frac{Sabc}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{S} = 4R,$$

o sigui,

(3) $$r_a + r_b + r_c = 4R + r.$$

Apliquem ara la desigualtat entre les mitjanes aritmètica i geomètrica (*desigualtat MA-MG*) a cada un dels primers membres de (2) i (3) sortirà

$$(r_a + r_b + r_c)\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right) \geq 9$$

que es redueix a

$$(4R + r)\frac{1}{r} \geq 9$$

de la que resulta immediatament la desigualtat d'Euler (1). La igualtat val si i només si el triangle és equilàter.

Si a (1) substituïm R i r per les seves expressions en funció dels costats del triangle, tindrem

$$\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \geq 2\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

que podem escriure en qualsevol de les dues formes

$$abc \geq 8(p-a)(p-b)(p-c)$$

o bé

$$1 \geq 8\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},$$

de les quals, tenint present que $p-a=\dfrac{-a+b+c}{2}$, etc. i que $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, etc. resulten, respectivament, les dues desigualtats

$$abc \geq (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \tag{4}$$

i

$$1 \geq 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

que són dues de les moltes formes equivalents de la desigualtat d'Euler. (Vegeu el problema 1.)

Algunes tècniques per a resoldre desigualtats geomètriques.

Les desigualtats geomètriques poden ser difícils de resoldre perquè hi ha pocs mètodes sistemàtics per a abordar-les, fins i tot les més simples. Solen ser necessaris diversos intents d'assaig i error per a trobar la correcta combinació d'estimacions i manipulacions. A continuació es mostren algunes tècniques que, combinades amb desigualtats algebraiques clàssiques, són útils per a arribar al resultat desitjat.

(i) Tota desigualtat homogènia entre les costats a, b, c d'un triangle pot transformar-se en una desigualtat entre els seus angles A, B, C i recíprocament, mitjançant l'ús de fórmules com $a=2R\sin A$, $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, etc.

Exemple 1. Efectuant le operacions indicades en la desigualtat (4),

$$abc \geq (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) > 0,$$

obtenim

$$abc \geq a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)-2abc > 0$$

o, equivalentment,

$$3abc \geq a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2) > 2abc,$$

de la qual, dividint per $2abc$, resulta

$$\frac{3}{2} \geq \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} > 1$$

o sigui

$$1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Exemple 2. A partir de la desigualtat MA-MG aplicada als nombres positius $bc(p-a)$, $ca(p-b)$, $ab(p-c)$ i de (2), tenim

$$\begin{aligned} bc(p-a)+ca(p-b)+ab(p-c) &\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2(p-a)(p-b)(p-c)} \geq \\ &\geq 3\sqrt[3]{64(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2} = \\ &= 12(p-a)(p-b)(p-c). \end{aligned}$$

que equival a

$$\frac{bc}{(p-b)(p-c)}+\frac{ca}{(p-c)(p-a)}+\frac{ab}{(p-a)(p-b)} \geq 12$$

és a dir,

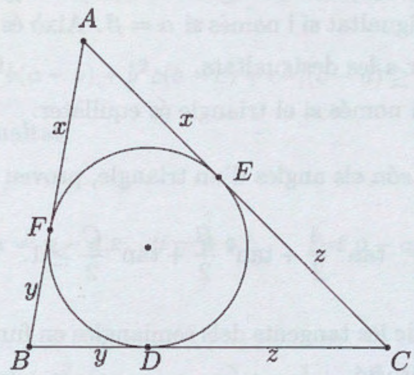
$$\operatorname{cosec}^2\frac{A}{2}+\operatorname{cosec}^2\frac{B}{2}+\operatorname{cosec}^2\frac{C}{2} \geq 12$$

ja que $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ i cíclicament.

(ii) Qualsevol desigualtat entre les costats d'un triangle es pot transformar en una desigualtat entre tres nombres positius arbitraris, i recíprocament.

En efecte, considerem la circumferència inscrita en un triangle arbitrari de costats a, b, c. Com qne els segments de tangent traçats a una circumferència des d'un punt exterior són iguals, tenim

$$AE = AF = x, \qquad BF = BD = y, \qquad CD = CE = z$$



i, en conseqüència

$$a = y + z, \qquad b = z + x, \qquad c = x + y,$$

$$x = p - a, \qquad y = p - b, \qquad z = p - c.$$

Aquestes equacions impliquen que per un tal triangle les distàncies entre els vèrtexs i els punts de tangència contigus dels costats amb la circumferència inscrita són nombres positius i, dualment, corresponents amb tres nombres positius existeix un triangle els costats del qual vénen donats per (4). Aquesta dualitat permet utilitzar totes les desigualtats vàlides per a qualsevol terna de nombres positius.
Vegem tres aplicacions d'aquest mètode.

Exemple 3. Si a, b, c són les longituds dels costats d'un triangle, demostreu que

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

Fent servir la substitució indicada

$$x = \frac{b+c-a}{2}, \quad y = \frac{c+a-b}{2}, \quad z = \frac{a+b-c}{2}$$

la desigualtat que hem de provar s'escriu

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{z+x}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geq 3$$

que és equivalent a

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) \geq 6.$$

Només queda aplicar un resultat elemental: si α i β són nombres reals positius, llavors $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} \geq 2$, complint-se la igualtat si i només si $\alpha=\beta$. Això és immediat, però constitueix un teorema fonamental per a les desigualtats.

És compleix la igualtat si i només si el triangle és equilàter.

Exemple 4. Si A, B, C són els angles d'un triangle, proveu que

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2} \geq 1.$$

Si expressem els quadrats de les tangents dels semiangles en funció dels costats i fem servir un a altra vegada la substitució

$$x=p-a, \qquad y=p-b, \qquad z=p-c,$$

la desigualtat proposada equival successivament a les següents:

$$\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}+\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}+\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)} \geq 1,$$

$$\frac{xy}{(x+y+z)z}+\frac{yz}{(x+y+z)x}+\frac{zx}{(x+y+z)y} \geq 1$$

i finalment,

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y} \geq x+y+z. \tag{5}$$

Ara bé, a partir de la desigualtat MA-MG tenim

$$\frac{\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{xy}{z}\frac{yz}{x}}$$

és a dir

$$\frac{\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}}{2} \geq y$$

i, anàlogament,

$$\frac{\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}}{2} \geq z, \qquad \frac{\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}}{2} \geq x.$$

La suma d'aquestes tres últimes desigualtats dóna, precisament, (5). Hi ha igualtat si i només si el triangle és equilàter.

Exemple 5. (IMO 1983) Siguin a, b, c les longituds dels costats d'un triangle. Demostreu que

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$$

i determineu-ne el cas d'igualtat.

Posem una vegada més

$$x=p-a,\quad y=p-b,\quad z=p-c,$$

i trobem que

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)=xy^3+yz^3+zx^3-xy^2z-yz^2x-zx^2y.$$

Per tant la desigualtat que hem de demostrar és equivalent a

$$xy^3+yz^3+zx^3\geq xy^2z+yz^2x+zx^2y=xyz(x+y+z)$$

o bé, dividint per xyz,

$$\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}\geq x+y+z,$$

la qual es pot deduir de la desigualtat de Cauchy-Schwartz

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\geq(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2$$

posant'hi

$$x_1=\frac{z}{\sqrt{x}},\quad x_2=\frac{x}{\sqrt{y}},\quad x_3=\frac{y}{\sqrt{z}};\qquad y_1=\sqrt{x},\quad y_2=\sqrt{y},\quad y_3=\sqrt{z}.$$

La igualtat es compleix si i només si els vectors (x_1,x_2,x_3) i (y_1,y_2,y_3) són linealment depeudents, és a dir, quan $\frac{z}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$, d'on $x=y=z$ i això correspon al triangle equilàter.

Observeu que la desigualtat també es compleix si el triangle és degenerat; en aquest cas hi ha igualtat si dos vèrtexs són coincidents.

(iii) Vegem, finalment, l'important paper que fan les funcions convexes i les funcions còncaves per a generar desigualtats a partir d'identitats.

Exemple 6. Si A, B, C són els angles d'un triangle, proveu qne

$$\sin A+\sin B+\sin C\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Utilitzant el fet que la funció $f(x) = \sin x$ és convexa a l'interval $[0, \pi]$ i la desigualtat de Jensen, resulta

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{A+B+C}{3} = 3 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

La igualtat es compleix si i només si el triangle és equilàter.

Exemple 7. Proveu que en tot triangle de costats a, b, c i semiperímetre p,

$$\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}.$$

Per a la primera desigualtat escribim $p = (p-a) + (p-b) + (p-c)$ i tenint present que si u, v, w són tres nombres positius qualssevol es compleix $\sqrt{u+v+w} < \sqrt{u} + \sqrt{v} + \sqrt{w}$, s'obté el resultat.

Per a la segona, fem servir la convexitat de la funció $f(x) = \sqrt{x}$ a $\mathbb{R}^+$ i la desigualtat de Jensen

$$\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq 3\sqrt{\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}} = \sqrt{3p}$$

Hi ha igualtat si i només si el triangle és equilàter.

Exemple 8. (IMO 1961) Proveu que en tot triangle de costats a, b, c, i àrea S,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}.$$

De la desigualtat obvia

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

resulta

(*) $$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Com que l'àrea d'un triangle és igual al semiproducte de dos costats pel sinus de l'angle comprès, tenim

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B$$

i, per tant, (*) s'escriu equivalentment com

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2S\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right).$$

Però la funció $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ és cóncava a l'interval $(0, \pi)$, i per tant la desigualtat de Jensen dóna immediatament

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 3\frac{1}{\sin\left(\dfrac{A+B+C}{3}\right)} = 3\frac{1}{\sin 60^o} = 2\sqrt{3},$$

és a dir,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}.$$

Es compleix la igualtat justament per a $a = b = c$.

Exemple 9. En tot triangle de costats a, b, c i semiperímetre p,

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{9}{p}.$$

Com que $\dfrac{p-a}{p} + \dfrac{p-b}{p} + \dfrac{p-c}{p} = 1$ i la funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$ és còncava per a $x > 0$, novamentper la desigualtat de Jensen resulta

$$\frac{p}{p-a} + \frac{p}{p-b} + \frac{p}{p-c} \geq 3\frac{1}{\dfrac{\dfrac{p-a}{p} + \dfrac{p-b}{p} + \dfrac{p-c}{p}}{3}} = 9,$$

equivalent a la proposada. Hi ha igualtat si i només si el triangle és equilàter.

Una mica diferents de les anteriors tenim els següents exemples de desigualtats entre algunes rectes notables d'un triangle.

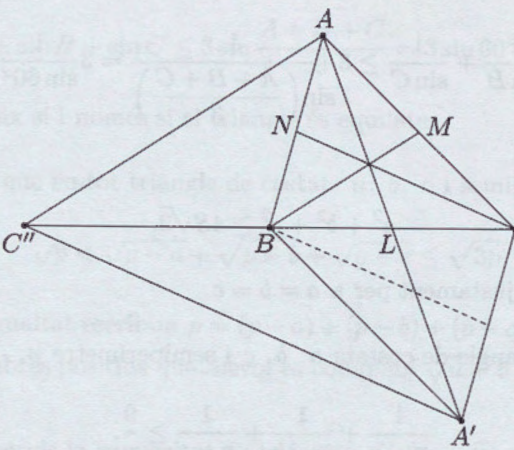
Exemple 10. (GE17) Proveu que en tot triangle ABC de costats A, b, c, i semiperímetre p i mitjanes m_a, m_b, m_c es compleix

$$\frac{3}{2}p < m_a + m_b + m_c < 2p.$$

Aprofitem aquest problema, que es troba resolt al capítol de Geometria, per exposar un mètode per a obtenir desigualtats on hi intervenen les mitjanes d'un triangle i donar una solució al problema diferent a la que s'exposa allí.

Sigui L el punt mitjà de BC i A' el punt simètric de A respecte de L. Sigui C'' el punt d'intersecció de BC amb la paral·lela a la mitjana BM traçada per A.

Volem provar que els costats del triangle $AC''A'$ mesuren m_a, m_b, m_c, i les seves mitjanes $\frac{3}{2}a$, $\frac{3}{2}b$, $\frac{3}{2}c$.



Tenim

$$AA' = 2 \cdot AM = 2m_a$$

$$AC'' = 2 \cdot BM = 2m_b \text{ (ja que } BM \text{ és paral·lela mitjana en el triangle } CAC'')$$

i que la mitjana CN és igual a la paral·lela mitjana BP' en el triangle $CC''A'$ com a conseqüència de la igualtat de $\triangle CAN$ i $\triangle BA'P'$ (per ser $ABA'C$ un paral·lelogram, $CA = BA'$, $\angle CAN = \angle BA'P'$ i $A'P' = \frac{1}{2}A'C = \frac{1}{2}CN = AN$).

Per tant

$$A'C'' = 2 \cdot BP' = 2 \cdot CN = 2m_c.$$

Per altra banda, el punt B és el baricentre del triangle $AC''A'$ perquè està sobre la mitjana $C''M$ i compleix $\frac{C''B}{BM} = \frac{2 \cdot BM}{BM} = 2$; les mitjanes de $\triangle AC''A'$ mesuren doncs

$$\frac{3}{2} \cdot C''B = \frac{3}{2} \cdot BC = \frac{3}{2}a,$$
$$\frac{3}{2} \cdot A'B = \frac{3}{2} \cdot CA = \frac{3}{2}b,$$
$$\frac{3}{2} \cdot AB = \frac{3}{2}c.$$

A més a més, és immediat observar que

$$\text{Àrea}\triangle AC''A' = 3S,$$

essent S l'àrea del triangle ABC.

Aquests resultats ens permeten concloure que el semiperímetre del triangle $AC''A'$ és igual a

$$m_a + m_b + m_c,$$

el radi de la seva circumferència inscrita és igual a

$$\frac{3S}{m_a + m_b + m_c}$$

i el de la seva circumferència circumscrita

$$\frac{2m_a m_b m_c}{3S},$$

per la qual cosa tota desigualtat entre R, r, p del $\triangle ABC$ pot transformar-se en una altra aplicant-la al triangle $AC''A'$.
Passem ara a establir la desigualtat proposada en aquest exemple.
Teuim

$$AA' = 2m_a < AB + BA' = b + c,$$

o sigui que,

$$2m_a < b + c$$

i, anàlogament

$$2m_b < c + a, \qquad 2m_c < a + b$$

la suma de les quals dóna

$$m_a + m_b + m_c < 2p.$$

Si apliquem aquesta desigualtat al triangle $AC''A'$, obtenim

$$\frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}c < 2m_a + 2m_b + 2m_c$$

és a dir,

$$\frac{3}{2}p < m_a + m_b + m_c.$$

En la solució citada es prova que els coeficients obtinguts, $\frac{3}{2}$ i 2, són els millors.

Exemple 11. Si h_a, h_b, h_c són les altures d'un triangle de costats a, b, c i r el radi de la seva circumferència inscrita,

$$h_a + h_b + h_c \geq 9r.$$

Dividint $a+b+c=2p$ per $2S=2rp=ah_a=bh_b=ch_c$ obtenim

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

i per la desigualtat MA-MG,

$$(h_a+h_b+h_c)\Big(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\Big)\geq 3\sqrt[3]{h_ah_bh_c}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{h_ah_bh_c}}=9$$

que es redueix a

$$(h_a+h_b+h_c)\frac{1}{r}\geq 9,$$

equivalent a la proposada. Hi ha igualtat si i només si el triangle és equilàter.

Exemple 12. Siguin v_a, v_b, respectivament, les bisectrius interiors dels angles A i B d'un triangle qualsevol.

Proveu que si $A<B$, llavors $v_a>v_b$.

Donat que

$$v_a^2=\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2} \quad \text{i} \quad v_b^2=\frac{4cap(p-b)}{(c+a)^2},$$

obtenim

$$\begin{aligned} v_a^2-v_b^2 &= 4cp\Big(\frac{b(p-a)}{(b+c)^2}-\frac{a(p-b)}{(c+a)^2}\Big)= \\ &= \frac{2cp}{(b+c)^2(c+a)^2}\big(b(-a+b+c)(c+a)^2-a(a-b+c)(b+c)^2\big)= \\ &= \frac{2cp}{(b+c)^2(c+a)^2}\big(c^3(b-a)+c^2(b^2-a^2)+3abc(b-a)+ab(b^2-a^2)\big). \end{aligned}$$

Donat que $A<B$ implica $a<b$, resulta $v_a>v_b$.

Problemes

DG1. Demostreu que la longitud d'un costat del triangle de Morley d'un triangle T donat, és menor que un terç de la longitud del costat més petit de T.

(El triangle de Morley de T és el triangle equilàter amb vèrtexs als punts d'intersecció de les trisectrius interiors adjacents dels angles de T. Vegeu el problema GE12.)

DG2. Demostreu que les següents desigualtats entre elements d'un triangle

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b),$$
$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A \sin B \sin C} \geq 4,$$
$$\sin A + \sin B + \sin C \geq \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C,$$
$$\frac{R}{r^2} \geq \frac{2p^2}{r r_a r_b r_c},$$
$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc \quad \text{(IMO 1964)}$$

són formes equivalents de la desigualtat d'Euler.

DG3. Si R és el radi de la circumferència circumscrita a un triangle i r el de la seva circumferència inscrita, proveu que

$$\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \geq \frac{5}{2}.$$

La igualtat es compleix només quan el triangle és equilàter.

DG4. Demostreu que si v_a, v_b, v_c són les bisectrius interiors d'un triangle de semiperímetre p,

$$v_a + v_b + v_c \leq p\sqrt{3}$$

És compleix la igualtat si i només si el triangle és equilàter.

DG5. *(Teorema d'Erdös-Mordell)* Si P és punt interior a un triangle ABC i PA_1, PB_1, PC_1 són les perpendiculars traçades per P als costats BC, CA i AB, llavors

$$PA + PB + PC \geq 2(PA_1 + PB_1 + PC_1).$$

DG6. Amb la notació del problema anterior, demostreu que

$$2\left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}\right) \leq \frac{1}{PA_1} + \frac{1}{PB_1} + \frac{1}{PC_1}.$$

DG7. Amb la notació del problema DG5, proveu que

$$PA_1 \cdot PB_1 \cdot PC_1 \leq \frac{1}{8} PA \cdot PB \cdot PC.$$

DG8. Siguin $A \geq B \geq C > 0$ els angles d'un triangle. Proveu que

$$\frac{\cos B}{\cos C} + \frac{\cos C}{\cos B} \leq \frac{\sin^2 A}{\sin B \sin C}.$$

DG9. Donat el triangle ABC, d'incentre I, siguin R_a, R_b, R_c els radis de les circumferències circumscrites als triangles IBC, ICA, IAB, respectivament. Demostreu que

$$4 \sum_{\text{cíclica}} \frac{R_a^2 + R_b^2}{ab} \geq 2 + \sum_{\text{cíclica}} \frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

DG10. En un triangle ABC, sigui r el radi de la circumferència inscrita i ρ_A el radi de la circumferència tangent a AB, AC i exteriorment a la seva circumferència inscrita; definim ρ_B i ρ_C anàlogament. Demostreu que

$$\rho_A + \rho_B + \rho_C \geq r.$$

DG11. Sigui G el baricentre i O el circumcentre d'un triangle acutangle ABC. Demostreu que

$$0 \leq OG \leq \frac{R}{3},$$

essent R el radi de la circumferència circumscrita.

DG12. Demostreu que en tot triangle de costats a, b, c i radi de la circumferència circnmscrita igual a R, es compleix la següent desigualtat

$$\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq 3\sqrt{3}R.$$

DG13. Dues circumferències concèntriques tenen, respectivament, radis R i R_1, $R_1 > R$. El quadrilàter $ABCD$ està inscrit a la petita i el $A_1B_1C_1D_1$ a la gran. El punt A_1 pertany a la prolongació de CD, B_1 a la de DA, C_1 a la de AB i D_1 a la de BC. Proveu que

$$\frac{\text{Àrea } (A_1B_1C_1D_1)}{\text{Àrea } (ABCD)} \geq \frac{R_1^2}{R^2}.$$

DG14. El tetràedre $ABCD$ té tres angles diedres rectes en el vèrtex D. Si la longitud de l'altura corresponent al vèrtex D és h i el radi de la circumferència inscrita al triangle ABC és r, demostreu que

$$h \geq r\sqrt{2}.$$

DG15. Siguin AA', BB', CC' les altures d'un triangle acutangle ABC i A_1, B_1, C_1 els segons punts d'intersecció de les rectes AA', BB', CC' amb la circumferència circumscrita al triangle ABC. Demostreu que

$$AA_1^2 \sin 2A + BB_1^2 \sin 2B + CC_1^2 \sin 2C > 24S_0,$$

on S_0 indica l'àrea del triangle $A'B'C'$.

DG16. En un triangle ABC escollim punts arbitraris $K \in BC$, $L \in AC$, $M \in AB$, $N \in LM$, $R \in MK$ i $F \in KL$. Si S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 i S denoten, respectivament, les àrees dels triangles AMR, CKR, BKF, ALF, BNM, CLN i ABC, demostreu que

$$S \geq 8\sqrt[6]{S_1S_2S_3S_4S_5S_6}.$$

DG17. Siguin a, b, c els costats d'un triangle, p el seu semiperímetre i r el radi de la seva circumferència inscrita. Demostreu que

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}.$$

DG18. Els tres vèrtexs d'un triangle de costats a, b, c són punts de coordenades enteres en el pla euclidià. Si R és el radi de la seva circumferència circumscrita, proveu que

$$abc \geq 2R.$$

DG19. Si designem per $S(x,y,z)$ l'àrea d'un triangle de costats x, y, z, proveu que per a dos triangles qualssevol de costats respectius a, b, c i a', b', c', es compleix

$$\sqrt{S(a,b,c)} + \sqrt{S(a',b',c')} \leq \sqrt{S(a+a',b+b',c+c')}.$$

DG20. Sigui h l'altura d'un tetràedre regular i h_1, h_2, h_3, h_4 les distàncies d'un punt interior a les seves cares. Proveu que

a) $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = h$.

b) $\dfrac{h-h_1}{h+h_1} + \dfrac{h-h_2}{h+h_2} + \dfrac{h-h_3}{h+h_3} + \dfrac{h-h_4}{h+h_4} \geq \dfrac{12}{5}$.

DG21. Si $ABCD$ és un quadrilàter convex i anomenem $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ i $DA = d$, demostreu que

$$S \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2,$$

on S és l'àrea del quadrilàter $ABCD$.

DG22. Sigui ABC un triangle i D el punt del costat BC tal que la circumferència inscrita en $\triangle ABD$ i la circumferència excrita relativa al costat DC de $\triangle ADC$ tenen el mateix radi ρ_1. Definim ρ_2 i ρ_3 anàlogament. Demostreu que

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 \geq \frac{9}{4}r,$$

essent r el radi de la circumferència inscrita en $\triangle ABC$.

DG23. Siguin A', B', C', respectivament, els punts d'intersecció de les prolongacions de les bisectrius interiors dels angles A, B, C d'un triangle amb la seva circumferència circumscrita. Si S denota l'àrea de $\triangle ABC$ i S' l'àrea de $\triangle A'B'C'$, demostreu la desigualtat

$$16(S')^3 \geq 27R^4 S,$$

essent R el radi de la circumferèucia circuunscrita a $\triangle ABC$.

DG24. Donat un triangle ABC de costats a, b, c i un triangle $A'B'C'$ de costats $\dfrac{b+c}{2}$, $\dfrac{c+a}{2}$, $\dfrac{a+b}{2}$, demostreu que

$$r' \geq r.$$

essent r i r', respectivament, els radis de les circumferències inscrites en $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$.

DG25. Designem per T i T' dos triangles de costats a, b, c i a', b', c', respectivament, sent

$$(a')^2 = 2a(p-a), \quad (b')^2 = 2b(p-b), \quad (c')^2 = 2c(p-c).$$

Proveu que

$$\text{(i) } p \geq p', \quad \text{(ii) } R \geq R', \quad \text{(iii) } r' \geq r \quad \text{(iv) } \frac{S'}{(p')^2} \geq \frac{S}{p^2}$$

sent p, R, r, S, respectivament, el semiperímetre, el radi de la circumferència circumscrita, el radi de la circumferència inscrita i l'àrea de T, i, anàlogament per a T'.

DG26. Si a, b, c són les longituds dels costats d'un triangle de semiperímetre p i àrea S, demostreu que

$$\left(\frac{p}{p-a}\right)^{\frac{p}{p-a}} + \left(\frac{p}{p-b}\right)^{\frac{p}{p-b}} + \left(\frac{p}{p-c}\right)^{\frac{p}{p-c}} \geq \frac{p^4}{S^2}.$$

DG27. Sigui M un punt interior del tetràedre $A_1A_2A_3A_4$. Les rectes A_1M, A_2M, A_3M, A_4M interseq uen les cares oposades respectivament en els punts A_1', A_2', A_3', A_4'. Demostreu que

$$\frac{MA_1'}{MA_1} + \frac{MA_2'}{MA_2} + \frac{MA_3'}{MA_3} + \frac{MA_4'}{MA_4} \geq \frac{4}{3}.$$

DG28. Sigui O el circumcentre d'un triangle acutangle ABC i R el radi de la seva circumferència circumscrita.
Si A' és el segon punt d'intersecció de la recta OA amb la circumferència circumscrita a $\triangle BOC$, B' el segon punt d'intersecció de la recta BO amb la circumferència circumscrita a $\triangle COA$ i C' el segon punt d'intersecció de la recta CO amb la circumferència circumscrita a $\triangle AOB$, demostreu que

$$OA' \cdot OB' \cdot OC' \geq 8R^3.$$

DG29. Demostreu que si a, b, c, d són les longituds dels costats d'un quadrilàter i si P és el seu perímetre, llavors

$$\frac{abc}{d^2} + \frac{bcd}{a^2} + \frac{cda}{b^2} + \frac{dab}{c^2} > P,$$

llevat que $a = b = c = d$.

DG30. Si les mitjanes relatives als costats AB i AC d'un triangle ABC són perpendiculars, proveu que

$$\cot B + \cot C \geq \frac{2}{3}.$$

DG31. Sigui P un punt interior a un triangle ABC de costats a, b, c i sigui A' el segon punt que la recta AP talla la circumferència per B, P, C. Definim B' i C' anàlogament. Proveu que el perímetre p de l'hexàgon $AB'CA'BC'$ compleix

$$p \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}).$$

DG32. Sigui P un punt interior al triangle equilàter ABC. Si les rectes AP, BP, CP tallen els costats BC, CA, AB respectivament en els punts A_1, B_1, C_1, demostreu que

$$A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1 \geq A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A.$$

DG33. Siguin a, b, c els costats d'un triangle de semiperímetre p i àrea S. Demostreu que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{p\sqrt{3}}{2S}.$$

DG34. Demostreu que la distància entre dos punts interiors qualssevol d'un triangle (respectivament tetràedre) està fitada superiorment per la longitud del major dels seus costats (respectivament arestes).

DG35. En un triangle ABC, de semiperímetre p, denotem per A', B', C', respectivament, els peus de les bisectrius interiors traçades des dels vèrtexs A, B, C sobre els costats oposats. Demostreu que

$$\frac{bc\sin\dfrac{A}{2}}{B'C'} + \frac{ca\sin\dfrac{B}{2}}{C'A'} + \frac{ab\sin\dfrac{C}{2}}{A'B'} \leq 2p.$$

DG36. Demostreu que en tot triangle ABC es compleix

$$\cos^2\frac{B-C}{2} \geq \frac{2r}{R},$$

essent R i r, respectivament, els radis de les circumferències circumscrita i inscrita del $\triangle ABC$. Quan val la igualtat?

DG37. Es prolonguen les bisectrius interiors dels angles A, B, C d'un triangle ABC fins que tallen la seva circumferència circumscrita en els punts T_1, T_2, T_3, respectivament, i es tracen les perpendiculars T_1H_1, T_2H_2, T_3H_3 als costats CA, AB, BC. Demostreu que

$$T_1H_1 + T_2H_2 + T_3H_3 \leq 3R,$$

sent R el radi de la circumferència circumscrita a $\triangle ABC$.

DG38. En un triangle rectangle de catets a, b i hipotenusa c, proveu que

$$4(ac + b^2) \leq 5c^2.$$

DG39. Construïm un triangle T_1 que té per costats les mitjanes d'un triangle rectangle T. Si R i R_1 són, respectivament, els radis de les circumferències circumscrites a T i a T_1, proveu que

$$R_1 \geq \frac{5R}{6}.$$

DG40. (IMO 1996) Sigui $ABCDEF$ un hexàgon convex tal que AB és paral·lel a ED, BC és paral·lel a FE i CD és paral·lel a AF. Siguin R_A, R_C i R_E els radis de les circumferències circumscrites als triangles FAB, BCD i DEF, respectivament; i sigui p el perímetre de l'hexàgon. Proveu que

$$R_A + R_B + R_C \geq \frac{p}{2}.$$

DG41. Sigui P un punt interior a un quadrilàter convex $ABCD$ d'àrea S. Demostreu que

$$S \leq \frac{(PA + PC)BD + (PB + PD)AC}{4}.$$

DG42. Siguin A, B, C i D punts fixos arbitraris de l'espai euclidià $\mathbb{R}^3$ i P un punt variable. Demostreu que la suma $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ és mínima quan P és el punt mitjà del segment que uneix els punts mitjans de AC i BD.

DG43. Demostreu que en un quadrilàter convex, la raó entre la suma del quadrats de les diagonals i la suma d'aquestes és menor que el semiperímetre del quadrilàter.

DG44. Demostreu que en un quadrilàter convex de costats a, b, c, d i àrea S es compleix la següent desigualtat

$$4S \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

DG45. Si a, b, c, d són les longituds dels costats d'un quadrilàter convex i e, f les de les seves diagonals, proveu que

$$\max(a, b, c, d) \geq \frac{\sqrt{e^2 + f^2}}{2}.$$

DG46. Si A_1, A_2, A_3, A_4 són els vèrtexs d'un tetràedre, r_i el radi de l'esfera excrita relativa a la cara oposada al vèrtex A_i i r el radi de l'esfera inscrita, demostreu que

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{r_i + r}{r_i - r} \geq 12.$$

Mostra de solucions.

Solució del problema DG5

Donat que $\angle AB_1P = 90°$ i $\angle AC_1P = 90°$, els punts B_1 i C_1 estan sobre la circumferència de diàmetre PA. El teorema dels sinus aplicat al $\triangle AB_1C_1$ dóna

$$PA \cdot \sin A = B_1C_1.$$

Anàlogament, els punts A_1 i C_1 estan sobre la circumferència de diàmetre PB. Els angles $\angle BPC_1$ i $\angle BA_1C_1$ són iguals perquè són inscrits a aquesta circumferència i determinen el mateix arc; en conseqüència, si C_2 és la projecció ortogonal de C_1 sobre BC, els triangles PC_1B i $A_1C_2C_1$ són semblants i per tant tenim

$$\frac{C_2A_1}{A_1C_1} = \frac{PC_1}{PB} \Longrightarrow C_2A_1 = \frac{PC_1 \cdot A_1C_1}{PB} = PC_1 \cdot \sin B$$

on l'última igualtat s'obté en aplicar el teorema dels sinus al $\triangle BA_1C_1$.
El mateix raonament, aplicat als punts A_1 i B_1 sobre la circumferència de diàmetre PC, ens permet concloure que

$$A_1B_2 = PB_1 \cdot \sin C,$$

essent B_2 la projecció ortogonal de B_1 sobre BC.

Per tant

$$PA \cdot \sin A = B_1C_1 \geq \text{projecció de } B_1C_1 \text{ sobre } BC = C_2B_2 =$$
$$= C_2A_1 + A_1B_2 = PC_1 \cdot \sin B + PB_1 \cdot \sin C$$

o sigui,

$$PA \geq \frac{b}{a}PC_1 + \frac{c}{a}PB_1,$$

aquesta última s'obté aplicant el teorema dels sinus al $\triangle ABC$ i de la qual resulten, per permutació circular, les dues següents

$$PB \geq \frac{c}{b}PA_1 + \frac{a}{b}PC_1, \qquad PC \geq \frac{a}{c}PB_1 + \frac{b}{c}PA_1.$$

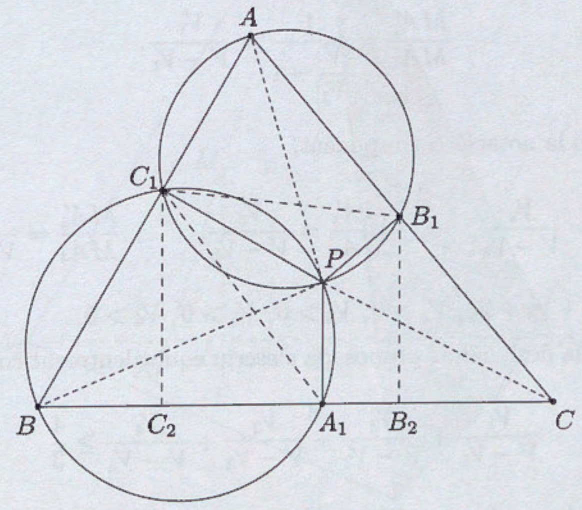
Així doncs

$$PA + PB + PC \geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)PA_1 + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)PB_1 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)PC_1.$$

Cada un dels parèntesis és igual o major que 2 (vegeu l'exemple 3) i, per tant resulta immediatament que

$$PA + PB + PC \geq 2(PA_1 + PA_2 + PA_3).$$

Es compleix la igualtat si i només si el triangle ABC és equilàter i P és el seu centre.



En particular, si P és l'incentre de $\triangle ABC$ i r el radi de la seva circumferència inscrita

$$PA = r\text{cosec}\,\frac{A}{2}, \qquad PB = r\text{cosec}\,\frac{B}{2}, \qquad PC = r\text{cosec}\,\frac{C}{2}, \qquad PA_1 = PB_1 = PC_1 = r$$

i deduïm la següent desigualtat trigonomètrica

$$\text{cosec}\,\frac{A}{2} + \text{cosec}\,\frac{B}{2} + \text{cosec}\,\frac{C}{2} \geq 6$$

vàlida per als angles A, B, C d'un triangle.

Solució del problema DG27

Sigui E i F, respectivament, els peus de les perpendiculars traçades per A_1 i M a la cara de vèrtexs A_2, A_3, A_4.

Si denotem per V el volum del tetràedre donat i per V_1 el del $MA_2A_3A_4$, tenim

$$\frac{MA_1'}{MA_1} = \frac{MA_1'}{A_1A_1' - MA_1'} = \frac{1}{\dfrac{A_1A_1'}{MA_1'} - 1},$$

on

$$\frac{A_1A_1'}{MA_1'} = \frac{A_1E}{MF} = \frac{V}{V_1}$$

ja que els volums de dues piràmides de la mateixa base són proporcionals a les seves altures, resulta

$$\frac{MA_1'}{MA_1} = \frac{1}{\dfrac{V}{V_1} - 1} = \frac{V_1}{V - V_1}.$$

Anàlogament, i amb la notació corresponent,

$$\frac{MA_2'}{MA_2} = \frac{V_2}{V - V_2}, \qquad \frac{MA_3'}{MA_3} = \frac{V_3}{V - V_3}, \qquad \frac{MA_4'}{MA_4} = \frac{V_4}{V - V_4},$$

essent $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$, $V_1 > 0$, $V_2 > 0$, $V_3 > 0$, $V_4 > 0$.

D'aquesta manera, la desigualtat proposada s'escriu equivalentment com

$$\frac{V_1}{V - V_1} + \frac{V_2}{V - V_2} + \frac{V_3}{V - V_3} + \frac{V_4}{V - V_4} \geq \frac{4}{3}$$

la validesa de la qual establim a continuació.

Aplicant la desigualtat MA-MG als nombres positius $V-V_1,\ V-V_2,\ V-V_3,\ V-V_4$ i $\dfrac{1}{V-V_1}, \dfrac{1}{V-V_2}, \dfrac{1}{V-V_3}, \dfrac{1}{V-V_4}$ resulta

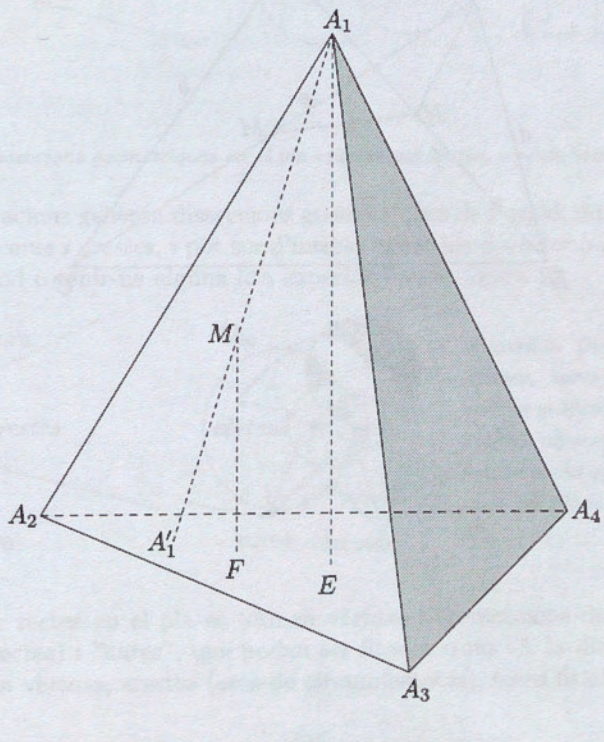
$$3\left(\frac{V_1}{V-V_1}+\frac{V_2}{V-V_2}+\frac{V_3}{V-V_3}+\frac{V_4}{V-V_4}+4\right)=$$
$$=3\left(\left(\frac{V_1}{V-V_1}+1\right)+\left(\frac{V_2}{V-V_2}+1\right)+\left(\frac{V_3}{V-V_3}+1\right)+\left(\frac{V_4}{V-V_4}+1\right)\right)=$$
$$=3V\left(\frac{1}{V-V_1}+\frac{1}{V-V_2}+\frac{1}{V-V_3}+\frac{1}{V-V_4}\right)=$$
$$=\Big((V-V_1)+(V-V_2)+(V-V_3)+(V-V_4)\Big)\left(\frac{1}{V-V_1}+\frac{1}{V-V_2}+\frac{1}{V-V_3}+\frac{1}{V-V_4}\right)\geq$$
$$\geq 4^2=16$$

És a dir,

$$3\left(\frac{V_1}{V-V_1}+\frac{V_2}{V-V_2}+\frac{V_3}{V-V_3}+\frac{V_4}{V-V_4}+4\right)\geq 16$$

i per tant

$$\frac{V_1}{V-V_1}+\frac{V_2}{V-V_2}+\frac{V_3}{V-V_3}+\frac{V_4}{V-V_4}\geq\frac{16}{3}-4=\frac{4}{3}.$$



Solució del problema DG45

Sigui $ABCD$ el quadrilàter de l'enunciat i posem $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $e = AC$ i $f = BD$.

Si M i N són, respectivament, els punts mitjans de les diagonals AC i BD, el teorema de la mitjana aplicat als triangles ABD, BCD i ANC dóna

$$AN^2 = \frac{2a^2 + 2d^2 - f^2}{4}, \qquad CN^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - f^2}{4},$$

$$MN^2 = \frac{2 \cdot AN^2 + 2 \cdot CN^2 - AC^2}{4} = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2).$$

Però $MN^2 \geq 0$, i en conseqüència $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq e^2 + f^2$ i, per tant,

$$4 \max(a^2, b^2, c^2, d^2) \geq e^2 + f^2$$

que és equivalent a la desigualtat proposada.

Es compleix la igualtat si i només si $MN = 0$ i $a = b = c = d$, és a dir, si $ABCD$ és un rombe.